

# PRÁCTICAS EDUCATIVAS CON USO DE GEOGEBRA

*Adriana Favieri*

*Claudia Algieri*

*Norma Sartor*

*Fabián Polo*

{afavieri, calgieri, nsartor, fpolo}@unlam.edu.ar

DIIT - Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM)

## Resumen

En este artículo presentamos el diseño de una actividad con uso de GeoGebra sobre derivadas que es introductoria al teorema de Lagrange para ser utilizada en lo que denominamos práctica educativa abierta con uso de la App GeoGebra. A través de ella pretendemos fomentar el desarrollo de lo que hemos dado en bautizar habilidades matemáticas con uso de la App GeoGebra (HMGG). Mostramos dichas HMGG, su relación con los ítems de la actividad y su grado de desarrollo. Hemos implementado la actividad en seis cursos de Análisis Matemático I de la Universidad Nacional de La Matanza de Argentina durante el año 2019. Luego de la experiencia realizada contamos con evidencia empírica sobre la facilidad de desarrollo de las HMGG con exigencia cognitiva baja y sobre la necesidad de estimular las HMGG de exigencia cognitiva mayor. Esta evidencia nos permite afirmar que la tecnología facilita la visualización de conceptos matemáticos, pero es el docente el que guía, enseña, enfoca en los conceptos importantes y pone luz sobre la metodología y procedimientos a utilizar

**Palabras clave: prácticas educativas abiertas, GeoGebra, habilidades matemáticas**

### **Abstract**

In this article we present the design of an activity with the use of GeoGebra on derivatives that is introductory to Lagrange's theorem to be used in what we call open educational practice with the use of the GeoGebra App. Through this activity we intend to promote the development of what we have given to denominate mathematical skills with the use of the GeoGebra App (MSGG). We show these MSGG, their relationship with the items of the activity and their degree of development. We have implemented this activity in six courses of Calculus I of the Universidad Nacional de La Matanza of Argentina during the year 2019. After the experience, we have empirical evidence on the ease of development of the lowest level of MSGG and on the need to stimulate MSGG with a higher cognitive demand. This evidence allows us to affirm that technology facilitates the visualization of mathematical concepts, but it is the teacher who guides, teaches, focuses on the important concepts and sheds light on the methodology and procedures to be used.

**Key Words: open educational practices, GeoGebra, math skills**

## Introducción

La aplicación de celular GeoGebra es libre, gratuita y cuenta con mucha aceptación entre los alumnos. Es común observar que la mayoría de los alumnos de los cursos de Análisis Matemático I del Departamento de Ingeniería de Investigaciones Tecnológicas (DIIT) de la Universidad Nacional de La Matanza (UNLaM) tienen la aplicación instalada en sus celulares. Generalmente la usan para graficar funciones.

Dado que la cátedra tiene entre sus objetivos la incorporación de tecnología en las actividades y el trabajo colaborativo en clases en grupos de dos alumnos consideramos apropiado realizar actividades en el aula con inclusión de la App GeoGebra (GeoGebra, 2015-2020) que inviten a un uso que exceda la simple realización de gráficos de funciones. Como docentes investigadores de la cátedra nos interesó estudiar las habilidades matemáticas que se ponían en juego y el grado de desarrollo que se evidenciaba en las producciones de los alumnos.

Las habilidades matemáticas han sido definidas y estudiadas por autores como Ferrer Vicente (2000), García Bello, Hernández Gallo y Pérez Delgado (2010), Morales Díaz, Bravo Estévez y Cañedo Iglesias (2013). Con base a estos aportes teóricos y adaptando al contexto tecnológico en el que estamos trabajando definimos como Habilidades Matemáticas con uso de la App GeoGebra (HMGG) a las acciones mentales que, mediante el entrenamiento continuo se convierten en modos de actuación, métodos necesarios, ejecución de las acciones y operaciones en el marco de una actividad matemática para solucionar actividades teóricas y prácticas que incluyen el uso de la aplicación.

Así, en el marco del proyecto de investigación C212, Dispositivo móvil como recurso didáctico en la enseñanza de Análisis Matemático, diseñamos algunas actividades para realizar en clases usando GeoGebra, que incluían ítems para resolver en lápiz y papel y otros para usar la aplicación y responder

de acuerdo con lo actuado. Los temas de dichas actividades abarcan funciones, límite y derivada. Mostraremos en esta oportunidad una de ellas, la relacionada con la interpretación geométrica de la derivada vinculada al teorema de Lagrange.

## Contexto

El contexto es la cátedra Análisis Matemático I del departamento de ingeniería e investigaciones tecnológicas DIIT en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Matanza. Está dividida en comisiones y para el desarrollo de las clases se toman decisiones consensuadas. Forma parte del diseño curricular de las carreras de Ingenierías en Informática, Civil, Industrial, Electrónica y Mecánica. Se cursa cuatrimestralmente con una carga horaria de 8 horas semanales distribuidas equitativamente en dos días cubriendo los tres turnos de cursada. Para fomentar la participación del alumnado se promueve el desarrollo de actitudes y habilidades que busquen la adquisición activa de nuevos conocimientos. Para ello existe un espacio curricular, denominado clase de Resolución de Actividades, en la cual se trabaja en modalidad de taller, con grupos de dos alumnos con la guía de por lo menos dos docentes, en el cual se presentan una variedad de problemas y/o ejercicios para resolver en 2 o 3 horas de clase. El fin es que los alumnos sean activos e independientes y puedan organizar el trabajo grupal a fin de lograr la producción a ser presentada en cada sesión de trabajo.

Este espacio es ideal para realizar prácticas educativas que inviten al desarrollo de habilidades matemáticas y, de ser posible, incorporando el uso de tecnología. Dado que parte del personal docente de la cátedra participa en el proyecto de investigación C212 denominado "Dispositivo móvil como recurso didáctico en la enseñanza de Análisis Matemático", diseñamos una serie de actividades para realizar usando GeoGebra que incluían ítems para resolver en

lápiz y papel y otros para usar la aplicación y responder de acuerdo con lo actuado.

Las actividades versaban por funciones, límite y derivada y se llevaron a cabo en seis comisiones dentro del tiempo de cursada. Desde la primera actividad se incluyó el uso de la App GeoGebra de manera tal de ir incorporando la tecnología de manera gradual y que los alumnos puedan usarla de manera eficiente y desarrollar habilidades matemáticas con uso de dicha aplicación. En este artículo mostraremos la actividad correspondiente a la interpretación geométrica de la derivada vinculada al teorema de Lagrange.

## Objetivos

Por lo expuesto previamente los objetivos de este artículo son:

- Presentar la actividad diseñada con uso de GeoGebra sobre la interpretación geométrica de la derivada vinculada al teorema de Lagrange.
- Describir las habilidades matemáticas con uso de la App GeoGebra que consideramos están involucradas.
- Mostrar el grado de desarrollo de dichas habilidades en las producciones de los alumnos.

## Desarrollo

### Encuadre teórico

#### Sobre prácticas educativas abiertas

El informe de la Iniciativa sobre la calidad de la educación basada en recursos de libre acceso (OPAL) promueve la utilización de recursos educativos de libre acceso (Open Educational Resources – OER) con vistas a intensificar su

utilización y crear estructuras de aprendizaje abierto para transformar la enseñanza (UNESCO, 2011). Por otro lado, define las prácticas educativas abiertas como «el uso de recursos educativos abiertos para mejorar la calidad de la educación y la formación, e innovar las prácticas educativas a escala institucional, profesional e individual» (OERUP, 2018).

### **Sobre habilidades matemáticas**

Las habilidades matemáticas han sido definidas y estudiadas por autores como Ferrer Vicente (2000), García Bello, Hernández Gallo y Pérez Delgado (2010), Morales Díaz, Bravo Estévez y Cañedo Iglesias (2013). Para la primera autora son procesos de construcción de los modos de actuación, métodos de solución o procedimientos relativos a una actividad matemática. Para los segundos la construcción, por parte del alumno, del modo de actuar inherente a una determinada actividad matemática, que le permite utilizar o buscar conceptos, propiedades, relaciones, procedimientos matemáticos, utilizar estrategias de trabajo, realizar razonamientos y juicios que son necesarios para resolver problemas matemáticos. Los terceros afirman que las habilidades se forman y desarrollan a través de las acciones mentales, mediante el entrenamiento continuo y se convierten en modos de actuación que dan solución a tareas teóricas y prácticas.

Delgado Rubí, Hernández, Valverde y Rodríguez (1998) clasifican las habilidades matemáticas según su función en habilidades conceptuales, traductoras, operativas, heurísticas y metacognitivas. Las habilidades conceptuales son aquellas que operan directamente con los conceptos, como ser identificar, fundamentar, comparar y demostrar. Las habilidades traductoras son las que permiten pasar de un dominio a otro del conocimiento, tal como interpretar, modelar y recodificar. Las habilidades operativas funcionan generalmente como auxiliares de otras más complejas y están relacionadas con la ejecución en el plano material o verbal; entre ellas,

graficar, algoritmizar, aproximar, optimizar y calcular. Las habilidades heurísticas son las que emplean recursos heurísticos y que están presentes en un pensamiento reflexivo, estructurado y creativo; como ser, resolver, analizar y explorar. Y las habilidades metacognitivas son necesarias para la adquisición, empleo y control del conocimiento y demás habilidades cognitivas; destacándose planificar, predecir, verificar, comprobar y controlar.

### **Sobre GeoGebra**

Es un software de matemática gratuito y de código abierto, adaptable a todos los niveles educativos. Incluye geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo, con la posibilidad de incorporar actividades dinámicas a través de los llamados "deslizadores". Su interfaz es de fácil uso y cuenta con poderosas herramientas. Ofrece la posibilidad de crear materiales de aprendizaje interactivos como páginas web, por lo que se convierte en una herramienta de autoría (GeoGebra, 2015-2020).

### **Adaptaciones teóricas a nuestro contexto**

#### **Prácticas educativas abiertas con uso de la App GeoGebra**

Partiendo de la propuesta de la OPAL, definimos *prácticas educativas abiertas con uso de la App GeoGebra (PEAGG)* al uso de la aplicación en clase para el desarrollo de actividades bajo modalidad taller con el fin de mejorar la calidad del proceso de enseñanza aprendizaje en la educación superior.

#### **Habilidades matemáticas con uso de la App GeoGebra**

Con base a estos aportes teóricos de Ferrer Vicente (2000), García Bello, Hernández Gallo y Pérez Delgado (2010), Morales Díaz, Bravo Estévez y Cañedo Iglesias (2013) y, adaptando al contexto tecnológico en el que estamos trabajando definimos como *Habilidades Matemáticas con uso de la App GeoGebra (HMGG)* a las acciones mentales que, mediante el

entrenamiento continuo se convierten en modos de actuación, métodos necesarios, ejecución de las acciones y operaciones en el marco de una actividad matemática para solucionar actividades teóricas y prácticas que incluyen el uso de la aplicación.

### Actividad diseñada

La actividad presentada en este artículo es la actividad Nro. 3 correspondiente a derivadas y es introductoria al teorema de Lagrange. Tiene por objetivo interpretar geoméricamente la derivada en un punto, relacionar la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantánea y vincular lo realizado en la App con lo realizado en lápiz y papel, articulando lo resuelto en la App y lo hecho en lápiz y papel. En la tabla 1 observamos el enunciado de la actividad en la cual, los ítems en los que el alumno debía usar la App están escritos con letra cursiva, y aquellos en los cuales debía responder en lápiz y papel en letra normal.

Tabla 1: Enunciado actividad N° 3

<p><b>Universidad Nacional de la Matanza</b>  <b>Cátedra: Análisis Matemático I - Actividad Nro 3 - Derivada</b></p> <p><b>Integrantes:</b> _____</p> <p><b>Curso:</b> _____</p> <p>La siguiente fórmula relaciona el volumen V (en litros) de un cierto gas, a temperatura constante, en función de la presión P (en atmósferas):</p> $f : [1;12] \rightarrow [2,5; 30] / V = f(P) = \frac{30}{P}$ <p>. Realizar las siguientes acciones en GeoGebra y responder las preguntas:</p> <p>a) <i>Definir la función en GeoGebra y graficarla en el intervalo.</i></p> <p>b) <i>Usando el comando "<b>Derivada(f)</b>", calcular la razón de cambio instantánea (rci) del volumen respecto a la presión para cualquier valor de P.</i></p> <p>c) ¿Cuál es el significado de la rci negativa en todo punto del intervalo?</p> <p>d) <i>Definir los puntos P(2,f(2)) y Q(6,f(6))</i></p> <p>e) <i>Utilizando comando "<b>Recta(A,B)</b>" trazar la recta que pasa por P y Q</i></p> <p>f) <i>Escribir en GeoGebra el cálculo para determinar la pendiente de dicha recta</i></p> <p>g) ¿Qué relación tiene con la razón de cambio media (rcp) en el intervalo [2,6]?</p> <p>h) <i>Usando el comando "<b>Resuelve(ecuación)</b>", hallar el valor de la Presión</i></p>
--

- para el cuál la rci es igual a la rcp en el intervalo  $[2,6]$ . (Expresarlo en forma aproximada, usar el símbolo que aparece a la derecha del resultado)
- Definir un deslizador "a" que tome los valores de 2 a 6
  - A través del comando "**Tangente(Punto, Función)**", hallar la recta tangente a la función  $f$  dependiendo del punto  $(a, f(a))$ .
  - Accionar el deslizador y buscar el valor de "a" (aproximado) para el cuál la recta tangente es paralela a la secante.
  - ¿Coincide con lo hallado en el punto h?
  - ¿Cómo se relaciona lo hecho en el punto h) y l)? ¿Podrían pensar alguna interpretación geométrica?

## Habilidades matemáticas con uso de la App GeoGebra

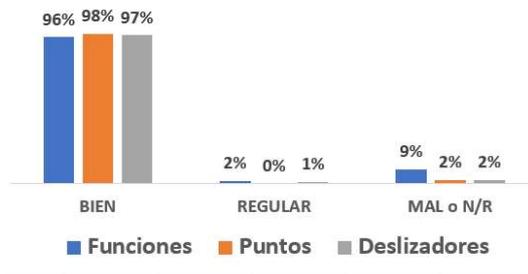
Las HMGG las agrupamos en tres categorías y su relación con los ítems de la actividad es:

- **Sobre definición de objetos matemáticos**
  - Definir y graficar funciones (ítem a)
  - Definir puntos (ítem d)
  - Crear deslizadores (ítem i)
- **Sobre uso de comandos**
  - Usar comando "Derivada(f)" (ítem b)
  - Usar comando "Recta(A,B)" (ítem e)
  - Usar comando "Resuelve(ecuación)" (ítem h)
  - Usar comando "Tangente(Punto, Función)" (ítem j)
- **Sobre interpretación y relación de conceptos**
  - Escribir el cálculo para determinar la pendiente de una recta (ECPR) (ítem f)
  - Relacionar con la razón de cambio promedio en el intervalo (RRCP)(ítems g)
  - Hallar "a" para el cual la recta tangente es paralela a la secante (HPTPS) (ítem k)
  - Relacionar con lo hecho previamente en la aplicación (RAPP) (ítems l-m)
  - Interpretar geoméricamente (IG) (ítem n)

## Grado de desarrollo las HMGG

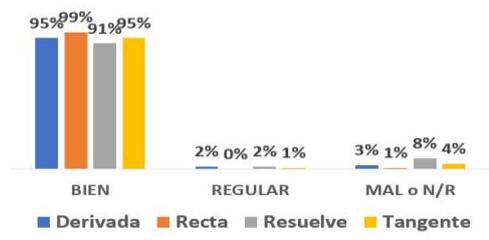
En los gráficos presentados a continuación podemos observar el grado de desarrollo de las HMGG de acuerdo con las categorías seleccionadas.

● **Sobre definición de objetos matemáticos**



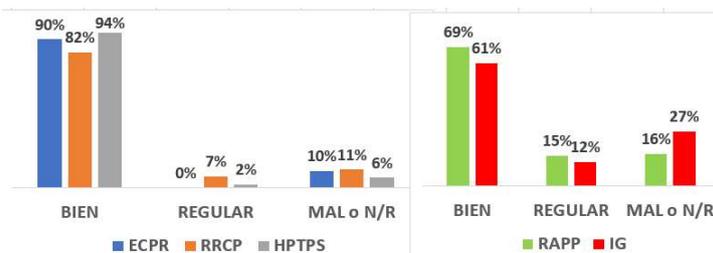
Advertimos un alto nivel de desarrollo de las HMGG de esta categoría.

● **Sobre uso de comandos**



Notamos buen desarrollo de las HMGG vinculadas al uso de comandos de la APP.

● **Sobre interpretación y relación de conceptos**



Percibimos niveles más bajos de desarrollo de las HMGG de esta categoría. También observamos un aumento de los porcentajes de regular, mal o no responde.

## Conclusiones

Acorde al desarrollo del trabajo, la metodología utilizada y los objetivos del artículo establecemos las conclusiones:

- Realizamos aporte teórico sobre prácticas educativas abiertas y habilidades matemáticas, pues establecimos definiciones sobre **Prácticas educativas abiertas con uso de la App GeoGebra y Habilidades matemáticas con uso de la App GeoGebra.**
- Diseñamos y presentamos una actividad con uso de GeoGebra sobre la interpretación geométrica de la derivada vinculada al teorema de Lagrange en la cual están diferenciados los ítems a resolver con la App y los correspondientes a resolución en lápiz y papel.
- Describimos las habilidades matemáticas con uso de la App GeoGebra estableciendo tres categorías principales, **sobre definición de objetos matemáticos, sobre uso de comandos y sobre interpretación y relación de conceptos.**
- Con respecto al grado de desarrollo de las HMGG establecemos:
  - Las HMGG relacionadas al uso de comandos y definición de objetos matemáticos han tenido buenos niveles de desarrollo.
  - Las HMGG vinculadas a la interpretación de conceptos y a la relación entre ellos presentaron niveles de desarrollo un poco más bajo.
  - Las HMGG que con exigencia cognitiva baja son factibles de ser desarrolladas con alto grado de buen desempeño.
  - Las HMGG que demandan una exigencia cognitiva mayor deben ser estimuladas por el docente durante el desarrollo de las actividades con la aplicación.
- A manera de cierre manifestamos que la tecnología facilita la visualización de conceptos matemáticos, pero es el docente el que guía,

enseña, enfoca en los conceptos importantes y pone luz sobre la metodología y procedimientos a utilizar.

## **Bibliografía**

Delgado Rubí, J. (1998). Las habilidades matemáticas. En J. (. Delgado Rubí, Cuestiones de didáctica de la Matemática (págs. 69-87). Rosario : Serie Educación. Homo Sapiens Ediciones.

Falsetti, M., Favieri, A., Scorzo, R. y Williner, B. (2009). Estudio sobre habilidades matemáticas para el Cálculo Diferencial en estudiantes de Ingeniería. 10mo Simposio de Educación Matemática. Chivilcoy: Edumat.

Morales Díaz, Y., Bravo Estévez, M. y Cañedo Iglesias, C. (2013). Enseñanza de la matemática en ingeniería mecánica para el desarrollo de habilidades. Pedagogía Universitaria, 18(4), 75 – 90.

## **Webgrafía**

Churches, A. (2009). Taxonomía de Bloom para la Era Digital. Obtenido de Eduteka: <http://cor.to/LQz3>

Ferrer Vicente, M. (2000). LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA ESTRUCTURACIÓN DE UN SISTEMA DE HABILIDADES MATEMÁTICAS EN LA ESCUELA MEDIA CUBANA. Obtenido de eumed.net Enciclopedia virtual: <http://www.eumed.net/tesis-doctorales/2010/mfv/Las%20habilidades%20matematica.htm>

García Bello, B., Hernández Gallo, T. y Pérez Delgado, E. . (2010). El proceso de formación de habilidades matemáticas. Obtenido de García Bello, B., Hernández Gallo, T. & Pérez Delgado, E. (2010). El proceso de formación de habilidades matemáticas. Recuperado de

<https://es.scribd.com/document/360870457/Proceso-Formacion-Habilidades-Matematicas.>:

<https://es.scribd.com/document/360870457/Proceso-Formacion-Habilidades-Matematicas.>

GeoGebra. (2015-2020). ¿Qué es GeoGebra? Obtenido de GeoGebra: <https://www.geogebra.org/about>

OERUP. (2018). Entender el concepto de prácticas educativas abiertas. Obtenido de OER Up Training: <https://www.oerup.eu/es/modulo-5/entender-el-concepto-de-practicas-educativas-abiertas/#:~:text=La%20iniciativa%20Open%20Educational%20Quality,institucional%2C%20profesional%20e%20individual%2C%20BB.>

UNESCO. (03 de marzo de 2011). Publicación del Informe 2011 de la Iniciativa sobre la calidad de la educación basada en recursos de libre acceso (Open Educational Quality Initiative – OPAL). Obtenido de UNESCO - Servicio de Prensa » P: [http://www.unesco.org/new/es/media-services/single-view/news/open\\_educational\\_quality\\_initiative\\_releases\\_2011\\_report/](http://www.unesco.org/new/es/media-services/single-view/news/open_educational_quality_initiative_releases_2011_report/)